FACULTÉ DES SCIENCES ECONOMIQUES

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

PRÉNOM:
NOM:
Numéro d'étudiant :
Groupe de TD : Note: **/20**

STATISTIQUES APPLIQUÉES 1

Licence Économie Gestion - 2e Année — Année 2016-2017

CM : T. Karcher[1] — TDs : Auréline Fargeas et Ewen Gallic[2]

Statistiques Appliquées - Contrôle continu n° 2

5 Décembre 2016, Groupes C01, C05 et D10.
Durée : 45 minutes.
Documents interdits, calculatrice autorisée

SUJET C

Exercice 1

Entre 2004 et 2016, Thierry Omeyer, le gardien de but de l'équipe de handball du Paris Saint-Germain a arrêté en moyenne 40% des tirs.
Thierry Omeyer est soumis à 294 tirs sur le début du championnat.
Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de tirs arrêtés par le gardien sur les 294 tentatives.

1. Quelle est la loi suivie par X ?

Il s'agit de répéter 294 fois et de manière indépendante une épreuve de Bernoulli avec une probabilité $p = 0.4$ de succès à chaque épreuve. Aussi, $X \sim \mathcal{B}in(n, p)$, avec $n = 294$ et $p = 0.4$. On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{X = x\} &= C_n^x \times p^x \times (1-p)^{n-x}\\ &= C_{294}^x \times 0.4^x \times (1-0.4)^{294-x}\end{aligned}$$

2. Quelle est la probabilité que le gardien de but arrête entre 105 et 107 tirs sur les 294 (ne pas utiliser d'approximation de loi) ?

On cherche :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(105 \leq X \leq 107) &= \mathbb{P}(X = 105) + \mathbb{P}(X = 106) + \mathbb{P}(X = 107)\\ &= C_{294}^{105} \times 0.4^{105} \times (1-0.4)^{294-105} +\\ &\quad C_{294}^{106} \times 0.38^{106} \times (1-0.4)^{294-106} +\\ &\quad C_{294}^{107} \times 0.4^{107} \times (1-0.4)^{294-107}\\ &= 0.01551273 + 0.01843966 + 0.02159911\\ &= 0.0555515 = 5.55\%.\end{aligned}$$

La probabilité d'arrêter entre 105 et 107 buts sur les 294 est de 5.55%.

3. Combien de tirs Thierry Omeyer doit-il s'attendre à arrêter sur les 294, en moyenne ?

[1] thierry.karcher[at]univ-rennes1.fr
[2] aureline.fargeas[at]univ-rennes1.fr, ewen.gallic[at]univ-rennes1.fr

L'espérance de X est :

$$\mathbb{E}(X) = np = 117.6.$$

Thierry Omeyer doit s'attendre à arrêter 117.6 tirs sur les 294.

4. Par quelle loi continue peut-on approcher la loi de X ?

Comme $n = 294 > 30$ est grand, on peut approcher la loi de X ($X \sim \mathcal{B}in(294, 0.4)$) par la loi Normale d'espérance $np = 294 \times 0.4 = 117.6$ et de variance $np(1-p) = 70.56$.
On a donc $X \approx X_c \sim \mathcal{N}(117.6, 8.4)$, soit, en centrant et réduisant : $Z = \frac{X_c - 117.6}{8.4} \sim \mathcal{N}(0,1)$

5. Sans corriger de la continuité, utilisez l'approximation continue de la loi de X obtenue à la question précédente pour calculer la probabilité que Thierry Omeyer arrète 126 tirs ou moins sur les 278 essais.

Il s'agit de chercher :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leq 126) &\approx \mathbb{P}(X_c \leq 126) \\
&= \mathbb{P}(\frac{X_c - 117.6}{8.4} \leq \frac{126 - 117.6}{8.4}) \\
&= \mathbb{P}(Z \leq 1) \\
&= 0.8413 = 84.13\%
\end{aligned}$$

La probabilité que le gardien arrête 126 buts ou moins est de 84.13%.

6. Même question en corrigeant de la continuité (on arrondira la valeur du quantile à 0.01 près).

Il s'agit de chercher :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leq 126.5) &\approx \mathbb{P}(X_c \leq 126.5) \\
&= \mathbb{P}(\frac{X_c - 117.6}{8.4} \leq \frac{126.5 - 117.6}{8.4}) \\
&= \mathbb{P}(Z \leq 1.06) \\
&= 0.8554 = 85.54\%
\end{aligned}$$

La probabilité que le gardien arrête 126 buts ou moins, quand on corrige de la continuité, est de 85.54% (on se rapproche de la vraie valeur qui est de ≈ 85.52238).

Exercice 2

En 2009, les maternités rennaises on enregistré une moyenne de 16 naissances par jour. On suppose que les naissances surviennent indépendamment les unes des autres.
Soit X la variable aléatoire qui indique le nombre de naissances enregistrées chaque jour.

1. Quelle est la loi suivie par X ?

   Il s'agit de compter les événements qui surviennent dans un intervalle de temps donné, sans que l'occurrence d'un événement n'influence la probabilité d'occurrence des autres événements. Aussi, X suit une loi de Poisson. On note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, avec $x = \{0, 1, \ldots\}$.

   Comme on sait qu'en moyenne, il y a 16 naissances par jour, on a $\mathbb{E}(X) = 16$. Donc le paramètre λ vaut 16.

   La fonction de masse de X est donnée par $\mathbb{P}(X = x) = exp(-\lambda)\frac{\lambda^x}{x!}$, pour $x = \{0, 1, \ldots\}$.

2. En écrivant le calcul uniquement, sans le réaliser, indiquez la probabilité que le nombre de naissances pour un jour donné soit compris entre 14 et 20.

   Il s'agit de chercher :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(14 \leq X \leq 20\right) &= \sum_{x=14}^{20} \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X = 14) + \mathbb{P}(X = 15) + \ldots + \mathbb{P}(X = 20)\\ &= exp(-16)\frac{16^14}{14!} + exp(-16)\frac{16^15}{15!} + \ldots + exp(-16)\frac{16^{20}}{20!}\end{aligned}$$

   Note : la valeur qu'on obtient en faisant le calcul est $0.5936571 = 59.37\%$.

3. Par quelle distribution peut-on approcher la loi de X ? En utilisant cette approximation, calculez, sans correction de continuité, la probabilité que le nombre de naissances pour un jour soit compris entre 14 et 20.

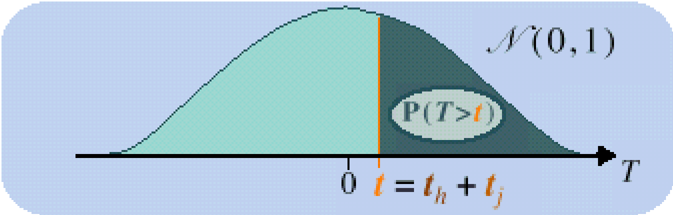
   Comme $\lambda > 15$ est grand, on peut approcher la loi de X par une distribution Normale que l'on va noter Z. On a $Z \sim \mathcal{N}(\lambda, \sqrt{\lambda})$. On peut donc poser, après centrage et réduction, $U = \frac{Z-\lambda}{\sqrt{\lambda}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
   On cherche :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(14 \leq X \leq 20) &\approx \mathbb{P}(14 \leq Z \leq 20)\\ &= \mathbb{P}\left(\frac{14-\lambda}{\sqrt{\lambda}} \leq \frac{Z-\lambda}{\sqrt{\lambda}} \leq \frac{20-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)\\ &= \mathbb{P}\left(\frac{14-16}{\sqrt{16}} \leq U \leq \frac{20-16}{\sqrt{16}}\right)\\ &= \mathbb{P}(-0.5 \leq U \leq 1) = \mathbb{P}(U \leq 1) - \mathbb{P}(U \leq -0.5)\\ &= \mathbb{P}(U \leq 1) - \mathbb{P}(U \leq 0.5)\\ &= 0.8413 - 0.3085 = 0.5328 = 53.28\%.\end{aligned}$$

   Ainsi, la probabilité qu'il y ait entre 14 et 20 naissances un jour donné est de 53.28%. *Note: si on corrige de la continuité, on cherche* $\mathbb{P}(13.5 \leq Z \leq 20.5)$, *soit* $\mathbb{P}(-0.625 \leq U \leq 1.125)$, *on on aboutit à* $0.60372 = 60.372\%$, *ce qui est beaucoup plus proche de la vraie valeur (mais on ne peut pas lire dans les tables de la loi Normale quand on a de tels quantiles, on peut seulement encadrer le résultat).*

Table 3-A de la loi Normale $\mathcal{N}(0,1)$.

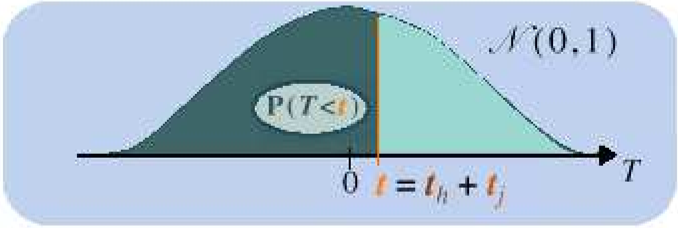
t positif[1] connu ($t = t_h + t_j$) ⇒ recherche[2] de P($T > t$).



	j	t_j									
h		0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
	0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
	0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
	0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
	0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
	0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
	0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
	0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
	0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
	0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
	0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
	1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
	1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
	1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
	1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
t_h	1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
	1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
	1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
	1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
	1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
	1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
	2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
	2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
	2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
	2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
	2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
	2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
	2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
	2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
	2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
	2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
	3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010

Table 3-B de la loi Normale $\mathcal{N}(0,1)$.

t positif[1] connu ($t = t_h + t_j$) ⇒ recherche[2] de P($T < t$).



	j	t_j									
h		0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
	0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
	0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
	0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
	0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
	0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
	0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
	0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
	0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
	0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
	0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
	1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
	1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
	1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
	1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
t_h	1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
	1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
	1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
	1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
	1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
	1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
	2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
	2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
	2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
	2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
	2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
	2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
	2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
	2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
	2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
	2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
	3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990