FACULTÉ DES SCIENCES ECONOMIQUES

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Statistiques Appliquées - Contrôle continu n° 1 | **L2 Éco - Gestion**

CM : T. Karcher[1]

TDs : E. Gallic[2]

Documents interdits, calculatrices autorisées

Date : 16 Octobre 2012

Groupe D08

Durée : 30 min

Exercice 1 (8 points)

a) De combien de marnières le professeur peut-il faire un choix de 4 élèves ?

Il y a 12 élèves dans la classe. Il y a donc $C_{12}^4 = \frac{12!}{4!(12-4)!} = 495$ manières de le faire ;

b) Combien de ces choix comportent au moins une fille ?

Regardons dans un premier temps combien de choix le professeur peut faire sans fille dans le groupe constitué. Il s'agit de choisir 4 éléments parmi 9, sans répétition et sans tenir compte de l'ordre. Il y a donc

$$C_9^4 = \frac{9!}{4!(9-4)!} = 126$$

groupes avec seulement des garçons. Le nombre de groupes dans lequel il y a au moins une fille est donc la différence entre le nombre de groupes possibles et le nombre de groupes constitués exclusivement de garçons : $495 - 126 = 369$.

c) Combien comportent exactement une fille ?

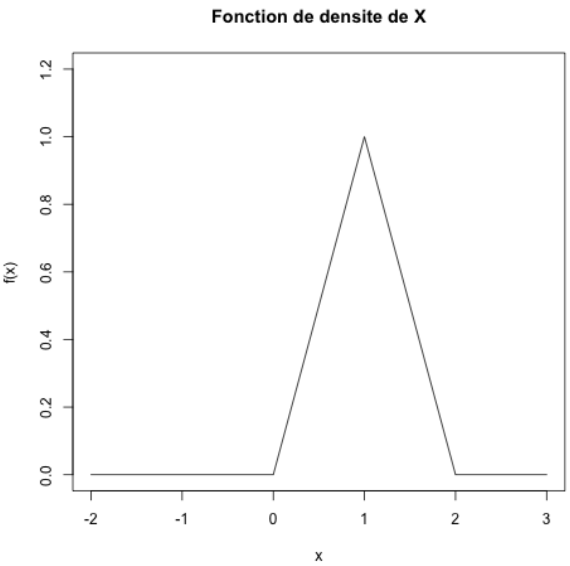
Dans un premier temps, l'enseignant choisit une fille parmi les 3. Il y a donc 3 choix possibles. Ensuite, il doit choisir 3 garçons parmi les 9, soit $C_9^3 = 84$. Aussi, il y a $3 \times 84 = 252$ groupes de 4 comportant exactement une fille.

Exercice 2 (12 points)

Soit la variable aléatoire X telle que pour chaque réalisation possible x on associe :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \text{ ou } x \geq 2 \\ x & \text{si } x \in [0,1] \\ -x+2 & \text{si } x \in [1,2] \end{cases}$$

1. thierry.karcher[at]univ-rennes1.fr
2. ewen.gallic[at]univ-rennes1.fr



1. Vérifier que f représente une fonction de densité pour X ;

Pour que f représente bien une fonction de densité pour X, il faut vérifier les deux points suivants :

- $\forall x \in \mathbb{R}, f(x \geq 0)$
  Cette condition est bien vérifiée pour toutes les valeurs de x réelles.
- $\int_{\mathbb{R}} f(x)\ \mathrm{d}x = 1$
  On a :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f(x)\ \mathrm{d}x &= \int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x\ \mathrm{d}x + \int_1^2 -x+2\ \mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[-\frac{x^2}{2} + 2x\right]_1^2 \\
&= \frac{1}{2} + \left(-2+4+\frac{1}{2}-2\right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

2. Calculer l'espérance mathématique et la variance de X ;

Espérance :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x^2\ \mathrm{d}x + \int_1^2 -x^2 + 2x\ \mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[-\frac{x^3}{3} + x^2\right]_1^2 \\
&= \frac{1}{3} + \left(-\frac{8}{3} + 4 + \frac{1}{3} - 1\right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Variance :

On sait que :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2.$$

Or,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 x^3\ \mathrm{d}x + \int_1^2 -x^3 + 2x^2\ \mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3}\right]_1^2 \\
&= \frac{1}{4} + \left(-\frac{16}{4} + \frac{16}{3} + \frac{1}{4} - \frac{2}{3}\right) \\
&= -\frac{7}{2} + \frac{14}{3} \\
&= \frac{7}{6}.
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\mathbb{V}(X) = \frac{7}{6} - 1 = \frac{1}{6}.$$

3. **Sans effectuer les calculs**, donner l'expression de la fonction de répartition de X, notée F.

La fonction de répartition de X est donnée par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \int_0^x u\ \mathrm{d}u & \text{si } x \in [0,1] \\ \int_0^1 u\ \mathrm{d}u + \int_1^x -u + 2\ \mathrm{d}u & \text{si } x \in [1,2] \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$