

PRÉNOM:
NOM:
Numéro d'étudiant :
Groupe de TD :

Note: /20

STATISTIQUES APPLIQUÉES 1

Licence Économie Gestion - 2^e Année
CM : T. Karcher¹

Année 2016-2017
TDs : Auréline Fargeas et Ewen Gallic²

Statistiques Appliquées - Contrôle continu n° 2

30 Novembre 2016, Groupes C01, C05 et D10.

Durée : 45 minutes.

Documents interdits, calculatrice autorisée

SUJET B

Exercice 1

Supposons que le nombre de pages des 1200 livres de la bibliothèque de M. Dupond soit distribué normalement avec une moyenne de 339 pages par ouvrage, et un écart-type de 195 pages. M. Dupond part en voyage et souhaite emmener avec lui 16 livres, qu'il choisira aléatoirement parmi ses 339. Il connaît sa vitesse de lecture, et sait donc à peu près le nombre de pages qu'il pourra parcourir durant son voyage. Aussi, Monsieur Dupond, s'attachera à calculer la moyenne du nombre de pages des 16 livres qu'il aura sélectionné.

1. Quelle est la loi de la moyenne d'échantillonnage ?

Soit X la variable aléatoire qui représente la distribution du nombre de pages des livres. Comme elle est distribuée normalement, avec une moyenne de 339 pages et un écart-type de 195 pages, on a $X \sim \mathcal{N}(339, 195)$.

On est dans le cas où la population est Normale et on connaît σ , donc la distribution de la moyenne d'échantillonnage est :

$$\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right),$$

avec $\mu = 339$ et $\sigma = 195$. En centrant et en réduisant, on a :

$$Z := \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

2. Monsieur Dupond sait qu'il pourra lire tous ses ouvrages si la moyenne qu'il observe est de moins de 300 pages. Quelle est la probabilité qu'il puisse effectivement parcourir tous ses livres, c'est-à-dire que la moyenne soit inférieure à 300 ?

¹thierry.karcher[at]univ-rennes1.fr

²aureline.fargeas[at]univ-rennes1.fr, ewen.gallic[at]univ-rennes1.fr

On cherche :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\bar{X} < 300) &= \mathbb{P}\left(\bar{X} < \sqrt{n} \frac{300 - \mu}{\sigma}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(Z < \sqrt{16} \frac{300 - 339}{195}\right) \\ &= \mathbb{P}(Z < -0.8) \\ &= \mathbb{P}(Z > 0.8) \\ &= 0.2119 = 21.19\%.\end{aligned}$$

On lit en effet dans la table de la $\mathcal{N}(0,1)$ que la probabilité de tirer une valeur supérieure au quantile d'ordre 0.8 vaut 21.19%

3. Quelle est la probabilité que cette moyenne soit comprise entre 417 pages et 456 pages ?

On cherche :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(417 < \bar{X} < 456) &= \mathbb{P}\left(\sqrt{n} \frac{417 - \mu}{\sigma} < \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} < \sqrt{n} \frac{456 - \mu}{\sigma}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\sqrt{16} \frac{417 - 339}{195} < Z < \sqrt{16} \frac{456 - 339}{195}\right) \\ &= \mathbb{P}(1.6 < Z < 2.4) \\ &= \mathbb{P}(Z < 2.4) - \mathbb{P}(Z < 1.6)\end{aligned}$$

On lit dans la table de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ que pour un quantile de 2.4, la probabilité de tirer une valeur inférieure à ce quantile est de 0.9918. De même, on lit que la probabilité de tirer une valeur inférieure à 1.6 vaut 0.9452. On a donc :

$$\mathbb{P}(Z < 1.6) - \mathbb{P}(Z < 2.4) = 0.9918 - 0.9452 = 0.0466 = 4.66\%.$$

Ainsi, la probabilité que le nombre moyen de pages des livres sélectionnés soit compris entre 417 et 456 est de 4.66%.

Exercice 2

Mme Durand s'est aperçue qu'elle recevait beaucoup de courrier indésirable dans sa boîte mail. À chaque fois qu'elle reçoit un e-mail, elle le classe manuellement pour indiquer s'il est indésirable (spam) ou désirable (ham). Sa messagerie lui indique qu'elle reçoit 85% de courrier indésirable.

Note : les deux parties sont indépendantes.

Partie 1

Mme Durand relève sa messagerie. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre d'e-mails qu'elle doit ouvrir pour tomber sur un contenu désirable.

1. Quelle est la loi suivie par X ?

Soit $p = 0.15$ la probabilité de tomber sur un courrier désirable (la probabilité tomber sur un spam est de $1 - p = 0.85$). La variable aléatoire X suit une loi de Pascal de paramètre p . On a :

$$\mathbb{P}\{X = x\} = p(1 - p)^{x-1}.$$

2. Quelle est la probabilité de tomber sur un courriel désirable au bout du 3^e courriel ouvert ?

La probabilité que de tomber sur un ham au bout du 3^e e-mail ouvert est :

$$\mathbb{P}\{X = 3\} = p(1 - p)^2 = \frac{15}{100} \times \frac{85^2}{100} = 0.108375 = 10.84\%$$

(Echec – spam – pour les 2 premiers, et réussite à la 3^e ouverture).

3. Combien de courriels Mme Durand doit-elle s'attendre à ouvrir avant de tomber sur un message désirable ?

L'espérance de X est (d'après le cours):

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.15} = 6.666667.$$

Elle doit s'attendre à ouvrir en moyenne 6.67 courriels avant de tomber sur un ham.

Partie 2

Mme Durand a eu une réunion et n'a pas pu accéder à sa messagerie pendant 3h. Elle a reçu 250 nouveaux courriels, qu'elle décide de consulter.

Soit Y la variable aléatoire qui compte le nombre de courriels désirables parmi les 250 reçus.

4. Quelle est la loi suivie par Y ?

Il s'agit de répéter 250 fois et de manière indépendante une épreuve de Bernoulli avec une probabilité $p = 0.15$ de succès à chaque épreuve. Aussi, $Y \sim \text{Bin}(n, p)$, avec $n = 250$ et $p = 0.15$. On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{Y = y\} &= C_n^y \times p^y \times (1 - p)^{n-y} \\ &= C_{250}^y \times 0.15^y \times (1 - 0.15)^{250-y}\end{aligned}$$

5. Combien de courriers désirables Mme Durand doit-elle s'attendre à recevoir en moyenne ?

L'espérance de Y est :

$$\mathbb{E}(Y) = np = 250 \times 0.15 = 37.5.$$

Mme Durand doit s'attendre à trouver 37.5 courriels désirables parmi les 250 qu'elle a reçus.

6. Quelle est la probabilité que Mme Durand ait reçu entre 60 et 62 courriels désirables parmi les 250 ?

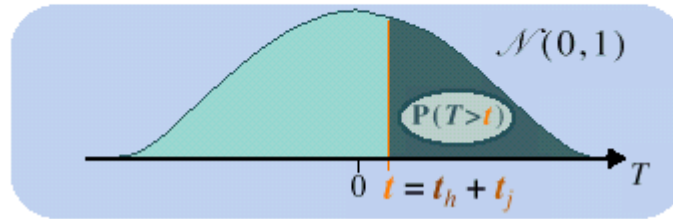
On cherche :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{60 < Y < 62\} &= \mathbb{P}\{Y = 60\} + \mathbb{P}\{Y = 61\} + \mathbb{P}\{Y = 62\} \\ &= C_{250}^{60} \times 0.15^{60} \times (1 - 0.15)^{250-60} + \\ &\quad C_{250}^{61} \times 0.15^{61} \times (1 - 0.15)^{250-61} + \\ &\quad C_{250}^{62} \times 0.15^{62} \times (1 - 0.15)^{250-62} \\ &= 8.888537 \times 10^{-5} \\ &= 0.00888537\%. \end{aligned}$$

La probabilité de recevoir entre 60 et 62 courriels désirables parmi les 250 est très proche de 0%.

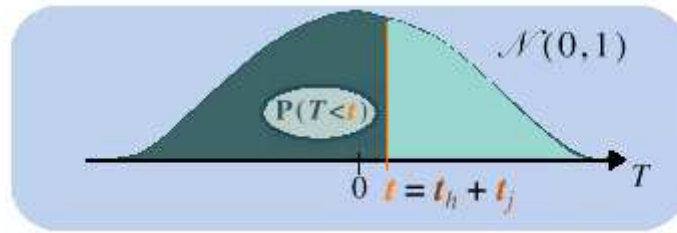
Table 3-A de la loi Normale $\mathcal{N}(0,1)$.

t positif¹ connu ($t = t_h + t_j$) \Rightarrow recherche² de $P(T > t)$.



h	j	t_j									
		0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
t_h	0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
	0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
	0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
	0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
	0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
	0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
	0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
	0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
	0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
	0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
	1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
	1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
	1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
	1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
	1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
	1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
	1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
	1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
	1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
	1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
	2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
	2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
	2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
	2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
	2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
	2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
	2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
	2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
	2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
	2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	

Table 3-B de la loi Normale $\mathcal{N}(0,1)$.
 t positif¹ connu ($t = t_h + t_j$) \Rightarrow recherche² de $P(T < t)$.



h	j	t_j									
		0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
t_h	0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
	0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
	0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
	0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
	0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
	0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
	0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
	0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
	0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
	0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
	1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
	1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
	1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
	1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
	1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
	1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
	1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
	1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
	1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
	1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817	
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857	
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890	
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916	
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936	
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952	
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964	
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974	
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981	
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986	
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990	