FACULTÉ DES SCIENCES ECONOMIQUES

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

PRÉNOM:
NOM:
Numéro d'étudiant :
Groupe de TD : Note: /20

STATISTIQUES APPLIQUÉES 1

Licence Économie Gestion - 2e Année — Année 2016-2017

CM : T. Karcher[1] — TDs : Auréline Fargeas et Ewen Gallic[2]

Statistiques Appliquées - Contrôle continu n° 2

30 Novembre 2016, Groupes C01, C05 et D10.
Durée : 45 minutes.
Documents interdits, calculatrice autorisée

SUJET A

Exercise 1 (12 points)

M. Dupond, qui a lu dans le journal que les machines à pinces des fêtes foraines ne délivrent une peluche que dans 5% des cas, décide tout de même de tenter sa chance.
Note : les deux parties sont indépendantes.

1.1 Partie 1

Il se munit d'assez d'argent pour utiliser 40 fois la machine à pinces, pour ainsi tenter de remporter une ou plusieurs peluches.
Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de peluches gagnées par M. Dupond sur les 40 essais effectués.

1. Quelle est la loi suivie par X ?

> Il s'agit de répéter 40 fois et de manière indépendante une épreuve de Bernoulli avec une probabilité $p = 0.05$ de succès à chaque épreuve. Aussi, $X \sim \mathcal{B}in(n, p)$, avec $n = 40$ et $p = 0.05$. On a :
>
> $$\begin{aligned}\mathbb{P}\{X = x\} &= C_n^x \times p^x \times (1-p)^{n-x}\\ &= C_{40}^x \times 0.05^x \times (1-0.05)^{40-x}\end{aligned}$$

2. Quelle est la probabilité que M. Dupond reparte en ayant gagné moins de 3 peluches ? ?

> On cherche :
>
> $$\begin{aligned}\mathbb{P}\{X < 3\} &= \mathbb{P}\{X = 0\} + \mathbb{P}\{X = 1\} + \mathbb{P}\{X = 2\}\\ &= C_{40}^0 \times 0.05^0 \times (1-0.05)^{40-0} +\\ &\quad C_{40}^1 \times 0.05^1 \times (1-0.05)^{40-1} +\\ &\quad C_{40}^2 \times 0.05^2 \times (1-0.05)^{40-2}\\ &= 0.1285122 + 0.2705519 + 0.2776717\\ &= 0.6767358 = 67.67\%.\end{aligned}$$
>
> La probabilité de repartir avec moins de 3 peluches est donc de 67.67%.

[1] thierry.karcher[at]univ-rennes1.fr
[2] aureline.fargeas[at]univ-rennes1.fr, ewen.gallic[at]univ-rennes1.fr

3. Combien de peluche M. Dupond doit-il s'attendre à remporter sur les 40 essais ?

> L'espérance de X est :
>
> $$\mathbb{E}(X) = np = 40 \times 0.05 = 2.$$
>
> M. Dupond. doit s'attendre à gagner 2 peluches.

1.2 Partie 2

L'année suivante, M. Dupond décide de retourner à la fête foraine, et de jouer autant de partie nécessaire pour remporter une peluche (il s'arrête de jouer dès qu'il remporte une peluche).
Soit Y la variable aléatoire qui indique le nombre d'essais nécessaires pour d'attraper la peluche.

4. Quelle est la loi suivie par Y ?

> Soit $p = 0.05$ la probabilité de gagner une peluche (la probabilité ne pas en gagner est donc de $1 - p = 0.95$. La variable aléatoire Y suit une loi de Pascal de paramètre p. On a :
>
> $$\mathbb{P}\{Y = y\} = p(1-p)^{y-1}.$$

5. Quelle est la probabilité de remporter une peluche au dixième essai ?

> La probabilité que de gagner une peluche au dixième essai est :
>
> $$\mathbb{P}\{Y = 10\} = p(1-p)^9 = \frac{5}{100} \times \frac{95}{100}^9 = 0.03151247.$$
>
> (Il échoue les 9 premières tentatives, et réussit à la dixième).

6. Combien d'essais M. Dupond doit-il s'attendre à faire pour remporter son lot ?

> L'espérance de Y est (d'après le cours):
>
> $$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.05} = 20.$$
>
> Il doit s'attendre à effectuer 20 parties pour remporter une peluche.

Exercise 2 **(8 points)**

Supposons que la hauteur des 120 poneys d'un troupeau soit distribuée normalement avec une moyenne de 122cm et un écart-type de 8cm. Un groupe de 64 personnes se présente au poney-club. L'animatrice choisit alors aléatoirement 64 poneys parmi les 120, et relève la taille de chacune des bêtes. Elle calcule ensuite la **taille moyenne** des poneys sélectionnés.

1. Quelle est la loi de la moyenne d'échantillonnage ?

> Soit X la variable aléatoire qui représente la distribution de la hauteur des poneys. Comme elle est distribuée normalement, avec une moyenne de 122cm et un écart-type de 8cm, on a $X \sim \mathcal{N}(122, 8)$.
>
> On est dans le cas où la population est Normale et on connaît σ, donc la distribution de la moyenne d'échantillonnage est :
>
> $$\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right),$$

avec $\mu = 122$ et $\sigma = 8$. En centrant et en réduisant, on a :

$$Z := \sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1).$$

2. Quelle est la probabilité que cette moyenne soit comprise entre 119.7cm et 124.6cm ?

On cherche :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(119.7 < \overline{X} < 124.6\right) &= \mathbb{P}\left(\sqrt{n}\frac{119.7 - \mu}{\sigma} < \sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} < \sqrt{n}\frac{124.6 - \mu}{\sigma}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\sqrt{64}\frac{119.7 - 122}{8} < Z < \sqrt{64}\frac{124.6 - 122}{8}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(-2.3 < Z < 2.6\right) \\
&= \mathbb{P}(Z < 2.6) - \mathbb{P}(Z < -2.3) \\
&= \mathbb{P}(Z < 2.6) - \mathbb{P}(Z > 2.3)
\end{aligned}$$

On lit dans la table de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ que pour un quantile de 2.6, la probabilité de tirer une valeur inférieure à ce quantile est de 0.9953. De même, on lit que la probabilité de tirer une valeur supérieure à 2.3 vaut 0.0107. On a donc :

$$\mathbb{P}(Z < 2.6) - \mathbb{P}(Z > 2.3) = 0.9953 - 0.0107 = 0.9846 = 98.46\%.$$

Ainsi, la probabilité que la taille moyenne des poneys sélectionnés soit comprise entre 119.7 et 124.6 est de 98.46%.

3. Supérieure à 125cm ?

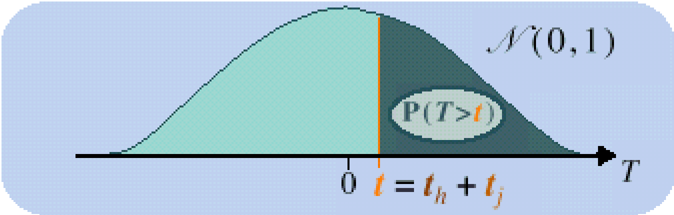
On cherche à présent :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\overline{X} > 125\right) &= \mathbb{P}\left(\sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} > \sqrt{n}\frac{125 - \mu}{\sigma}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(Z > \sqrt{64}\frac{125 - 122}{8}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(Z > 3\right) \\
&= 0.0013 = 0.13\%.
\end{aligned}$$

On lit en effet dans la table de la $\mathcal{N}(0,1)$ que la probabilité de tirer une valeur supérieure au quantile d'ordre 3 vaut 0.13%

Table 3-A de la loi Normale $\mathcal{N}(0,1)$.

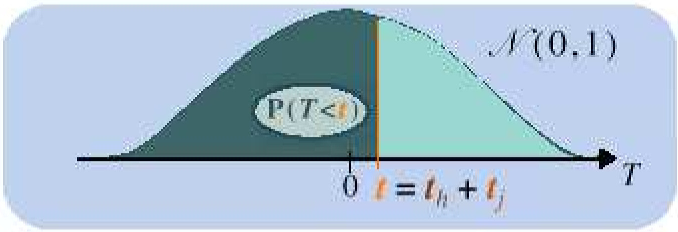
t positif[1] connu ($t = t_h + t_j$) $\Rightarrow$ recherche[2] de $P(T > t)$.



h \ j (t_h \ t_j)	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010

Table 3-B de la loi Normale $\mathcal{N}(0,1)$.

t positif[1] connu ($t = t_h + t_j$) $\Rightarrow$ recherche[2] de P($T < t$).



	j	t_j									
h		0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
	0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
	0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
	0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
	0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
	0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
	0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
	0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
	0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
	0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
	0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
	1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
	1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
	1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
	1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
t_h	1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
	1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
	1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
	1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
	1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
	1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
	2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
	2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
	2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
	2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
	2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
	2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
	2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
	2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
	2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
	2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
	3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990