FACULTÉ DES SCIENCES ECONOMIQUES

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Statistiques Appliquées - Contrôle continu n° 1 **L2 Éco - Gestion**

CM : T. Karcher[1]

TDs : H. Busson, A. Fargeas, E. Gallic[2]

Documents interdits, calculatrices autorisées

Date : 6 Novembre 2015

Groupe C01 S.I.

Durée : 30 min

Exercice 1 (4 points)

Considérons une loterie dans laquelle un joueur doit choisir une grille de 6 numéros parmi 54. Lors du tirage décidant de la combinaison gagnante, 6 numéros sont choisis aléatoirement, sans répétition, parmi les 54.

Les prix de cette loterie sont attribués de la manière suivante :

- premier prix : les 6 numéros de la grille sont les mêmes que ceux ayant été tirés ;
- second prix : la grille contient exactement 5 numéros parmi les 6 ayant été tirés aléatoirement ;
- troisième prix : la grille contient exactement 4 numéros parmi les 6 ayant étés tirés aléatoirement.

a) Combien de grilles différentes peut-on réaliser ?

Il s'agit de choisir 6 éléments parmi un ensemble de 54, l'ordre n'important pas. Le nombre de grilles différentes que l'on peut réaliser est donc :

$$C_{54}^{6} = \frac{54!}{6!(54-6)!} = 25827165.$$

b) Quelle est la probabilité de gagner le premier prix de cette loterie ?

Notons A_k l'événement “la grille contient k bons numéros”, avec $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.
Il y a une seule grille gagnante : 6 bons numéros parmi les 6, et aucun mauvais numéro parmi les 48. La probabilité de gagner le premier prix est alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_6) &= \frac{\text{\# de cas favorables}}{\# cas possibles}\\ &= \frac{C_6^6 C_{48}^0}{C_{54}^6}.\end{aligned}$$

c) Quelle est la probabilité de gagner le second prix ?

On doit avoir 5 bons numéros parmi les 6 choisis, et 1 parmi les non choisis. On a :

$$\mathbb{P}(A_5) = \frac{C_6^5 C_{48}^1}{C_{54}^6}.$$

1. thierry.karcher[at]univ-rennes1.fr
2. henri.busson[at]etudiant.univ-rennes1.fr, aureline.fargeas[at]univ-rennes1.fr
ewen.gallic[at]univ-rennes1.fr

d) Quelle est la probabilité de gagner le troisième prix ?

On doit avoir 4 bons numéros parmi les 6 choisis, et 2 parmi les non choisis. On a :

$$\mathbb{P}(A_4) = \frac{C_6^4 C_{48}^2}{C_{54}^6}.$$

Exercice 2 (6 points)

Soit X une variable aléatoire dont le domaine de définition est le suivant : $D_X = \{1, 2, 3, \ldots, 15\}$ et dont la fonction de fréquence est :

$$f_X(x) = \begin{cases} ax & \text{si } x \in D_X \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

a) Déterminer a ;

La fréquence de X est définie sur $D_X = \{1, 2, ..., 15\}$. Elle doit vérifier deux conditions :

i) $f_X(x) \geq 0, \quad \forall x \in D_X$
C'est vrai si $a > 0$.

ii) $\sum_{x \in D_x} f_X(x) = 1$
On doit donc avoir

$$\begin{aligned} & \sum_{x=1}^{15} a\, f_X(x) = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & a \sum_{x=1}^{15} f_X(x) = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & a = \frac{2}{15 \times (15+1)} \\ \Leftrightarrow \quad & a = \frac{1}{120}. \end{aligned}$$

On a donc :

$$f_X(x) = \frac{1}{120} x.$$

b) Déterminer $\mathbb{E}(X)$;

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{x=1}^{15} x f_X(x) \\
&= \sum_{x=1}^{15} \frac{1}{120} x^2 \\
&= \frac{1}{120} \sum_{x=1}^{15} x^2 \\
&= \frac{1}{120} \frac{15 \times (15+1) \times (2 \times 15 + 1)}{6} \\
&= \frac{1240}{120} = \frac{124}{12}.
\end{aligned}
$$

c) Déterminer la fonction de répartition $F_X(x)$ de X.

Pour des valeurs de x dans $\{1, 2, 3, \ldots, 15\}$, on a :

$$
\begin{aligned}
F_X(x) &= \sum_{k=1}^{x} f(k) \\
&= \sum_{k=1}^{x} a f(k) \\
&= \frac{1}{120} \sum_{k=1}^{x} k \\
&= \frac{1}{120} \frac{x \times (x+1)}{2} \\
&= \frac{x(x+1)}{240}.
\end{aligned}
$$

Aussi, on a :

$$
F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{x(x+1)}{240} & \text{si } x \in D_X \\ 1 & \text{si } x > 15 \end{cases}.
$$