FACULTÉ DES SCIENCES ECONOMIQUES

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Statistiques Appliquées - Contrôle continu n° 1 **L2 Éco - Gestion**

CM : T. Karcher [1]
TDs : E. Gallic [2]

Date : 25 Octobre 2013
Groupe C01 S.I.
Durée : 40 min

Documents interdits, calculatrices autorisées

Exercice 1 (5 points)

Un couple a trois enfants. Quelle est la probabilité que **les trois enfants** soient des garçons, sachant que :

(a) l'aîné en est un ?

> On note A l'événement «les trois enfants sont des garçons» et B l'événement «l'aîné est un garçon». Ce que l'on cherche est alors $\mathbb{P}(A \mid B)$.
> On admet que chacune des 8 issues qui composent l'univers sont équiprobables. On a $A = \{(G, G, G)\}$ et $B = \{(G, G, G), (G, G, F), (G, F, G), (G, F, F)\}$.
> On a donc $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{8}$ $(\frac{\#\text{ cas favorables}}{\#\text{ cas possibles}})$, et $\mathbb{P}(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.
> Ainsi, $\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1}{4}$.

(b) deux des enfants sont des garçons ?

> On note C l'événement «deux des enfants sont des garçons» :
> $C = \{(G, G, G), (G, G, F), (G, F, G), (F, G, G)\}$.
> Alors, $\mathbb{P}(C) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. De plus, $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A) = \frac{1}{8}$.
> On a donc $\mathbb{P}(A \mid C) = \frac{\mathbb{P}(A\cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{1}{4}$

Note : un arbre décrivant l'ensemble des issues possibles peut aider.

Exercice 2 (8 points)

a) De combien de manières différentes 11 étudiants de la maison *Slytherin* peuvent-ils se mettre en rang dans le couloir, en attendant l'arrivée du professeur Snape, si Malfoy doit être entre ses deux camarades Crabbe et Goyle ? (*Note : Malfoy, Crabbe et Goyle font partie des 11 étudiants.*)

> On doit d'abord placer les 8 *slytherins* ainsi que le groupe de 3 personnes. Il y a donc 9! façons de placer les 9 groupes. De plus, dans le groupe de Malfoy, il y a 2! façons de placer les 3 personnes, puisque Malfoy doit être au milieu (seuls Crabbe et Goyle peuvent changer de place). Aussi, il y a $9! \times 2!$ manières de placer ces 11 étudiants dans cette configuration.

---

1. thierry.karcher[at]univ-rennes1.fr
2. ewen.gallic[at]univ-rennes1.fr

b) Pour décider des décorations de Noël à *Hogwarts*, le directeur (Albus Dumbledore), doit former un comité de 7 personnes. Se sont portés candidats : 9 enseignants, 7 étudiants de la maison *Ravenclaw*, 4 fantômes, 6 étudiants de la maison *Griffindor* et 3 elfes. Combien de comités différents Dumbledore peut-il former s'il faut qu'il y ait un seul elfe, un seul fantôme, et **au plus** 2 enseignants ?

L'ordre dans lequel sont choisis les membres n'est pas important. Puisqu'il faut qu'il y ait au plus 2 enseignants, cela signifie que les groupes peuvent contenir 0 ou 1 enseignant.

Aucun enseignant :

$$C_3^1 C_4^1 C_9^0 C_{13}^5$$

Un enseignant :

$$C_3^1 C_4^1 C_9^1 C_{13}^4$$

Deux enseignants :

$$C_3^1 C_4^1 C_9^2 C_{13}^3$$

Il y a donc $C_3^1 C_4^1 C_9^0 C_{13}^5 + C_3^1 C_4^1 C_9^1 C_{13}^4 + C_3^1 C_4^1 C_9^2 C_{13}^3$ manières différentes de former ces comités.

c) Dans son cours de sortilèges, Harry doit employer un enchantement de lévitation pour déplacer 2 boîtes rouges, 3 boîtes bleues, 4 boîtes jaunes et 5 boîtes violettes sur une étagère. En supposant que les boîtes de même couleurs sont indiscernables, de combien de manières différentes Harry peut-il les placer ?

Il s'agit de permutations d'objets avec répétitions, dont certains sont indifférenciés. Il y a donc

$$\frac{(2+3+4+5)!}{2!3!4!5!} = \frac{14!}{2!3!4!5!}$$

façons différentes de placer ces 14 boîtes.

Exercice 3 (7 points)

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = \begin{cases} a(1-x), & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Déterminez a pour que f soit la fonction de densité d'une variable aléatoire que l'on notera X ;

Pour que f soit la fonction de densité de la variable aléatoire X, il faut qu'elle vérifie les deux conditions suivantes :

- $f(x) \geq 0, \quad \forall 0 \leq x \leq 1$:
  Comme $0 \leq x \leq 1$, on a $1 - x \geq 0$, on doit donc avoir $a \geq 0$.

- $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$:

$$\begin{aligned}\int_0^1 a(1-x)\,\mathrm{d}x &= 1\\ \left[ax - \frac{ax^2}{2}\right]_0^1 &= 1\\ a - \frac{a}{2} &= 1\\ a &= 2.\end{aligned}$$

b) Déterminez l'espérance mathématique et la variance de X ;

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 2x - 2x^2\,\mathrm{d}x\\ &= \left[x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_0^1\\ &= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \int_0^1 x^2f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 2x^2 - 2x^3\,\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{2x^4}{4}\right]_0^1\\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2\\ &= \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}.\end{aligned}$$

c) Déterminez la fonction de répartition de X.

Pour x appartenant à l'intervalle $[0, 1]$:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x 2(1-t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[2t - t^2\right]_0^x \\ &= 2x - x^2 \end{aligned}$$

La fonction de répartition de X est donnée par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ 2x - x^2, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$