FACULTÉ DES SCIENCES ECONOMIQUES

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Travaux dirigés de Statistiques Appliquées **L2 Économie - Gestion**

CM : T. Karcher [1]
TDs : H. Busson, A. Fargeas, E. Gallic [2]

2015/2016

Note : Tous les exercices ne seront pas corrigés en T.D. Seuls les exercices dont les numéros sont suivis par une étoile feront l'objet d'une correction : les autres sont considérés comme supplémentaires, pour l'entraînement. Certains pourront cependant être corrigés, en fonction des disponibilités horaires. Il ne sera pas donné de correction des exercices non effectués en TD : vous pourrez cependant essayer de les faire sur papier et demander à l'enseignant chargé de votre groupe de TD de vous corriger.

TD n° 1 : Introduction à la probabilité

Exercice 1* Une entreprise possède trois machines A, B et C. On note A_n (respectivement B_n et C_n) l'événement « n ouvriers travaillent sur la machine A » (respectivement B et C). Avec ces notations, écrivez les événements suivants :

a) Personne ne travaille sur la machine A ;
b) 2 ouvriers travaillent sur A et 1 ouvrier sur B ;
c) 1 ouvrier travaille sur A, 1 ouvrier sur B, et personne sur C ;
d) Moins de 3 ouvriers travaillent sur C :
e) Plus de 3 ouvriers travaillent sur A :
f) 2 ouvriers travaillent sur A et au moins 1 ouvrier travaille sur B :

Exercice 2* Un ensemble fondamental Ω est formé de 4 événements élémentaires : $\Omega = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$.

a) Calculer $\mathbb{P}(a_1)$ en supposant que $\mathbb{P}(a_2) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(a_3) = \frac{1}{6}$ et $\mathbb{P}(a_4) = \frac{1}{9}$
b) Calculer $\mathbb{P}(a_1)$ et $\mathbb{P}(a_2)$ en supposant que $\mathbb{P}(a_3) = \mathbb{P}(a_4) = \frac{1}{4}$ et $\mathbb{P}(a_1) = 2\mathbb{P}(a_2)$.
c) Calculer $\mathbb{P}(a_1)$ en supposant que $\mathbb{P}(a_2 \cup a_3) = \frac{2}{3}$, $\mathbb{P}(a_2 \cup a_4) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(a_2) = \frac{1}{3}$.

Exercice 3 Soit un jeu de trente-deux cartes.

a) De combien de manières différentes peut-on mélanger ce jeu ?
b) On tire cinq cartes au hasard. Quelle est la probabilité d'obtenir deux cœurs ?

On prend maintenant deux jeux identiques de trente-deux cartes. Il est clair que, une fois mélangées, il n'est plus possible de distinguer de quel jeu provient une certaine carte.

c) De combien de manières différentes peut-on mélanger ces soixante-quatre cartes ?
d) On tire cinq cartes au hasard et sans remise parmi ces soixante-quatre cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir les deux rois de cœurs ?

Exercice 4* Dans une entreprise, la probabilité qu'un ouvrier A quitte l'entreprise dans l'année est 1/5, et la probabilité qu'un cadre B quitte l'entreprise est 1/8. En supposant que ces deux événements sont indépendants, calculer la probabilité que :

a) A et B quittent l'entreprise.
b) L'un des deux quitte l'entreprise.
c) Ni A, ni B ne quitte l'entreprise :
d) B seulement quitte l'entreprise.

1. thierry.karcher[at]univ-rennes1.fr
2. henri.busson[at]etudiant.univ-rennes1.fr, aureline.fargeas[at]univ-rennes1.fr
ewen.gallic[at]univ-rennes1.fr

Exercice 5* En étudiant une population, on a remarqué que, pendant un mois, 40% des individus sont allés au cinéma, 25% sont allés au théâtre et 12,5% sont allés au cinéma et au théâtre.
Calculer la probabilité que, durant un mois, un individu :

a) aille au cinéma ou au théâtre.
b) n'aille pas au cinéma.
c) n'aille ni au cinéma ni au théâtre.
d) sachant qu'il est allé au cinéma, aille aussi au théâtre.
e) sachant qu'il n'est pas allé au théâtre, n'aille pas au cinéma.

Exercice 6* On soumet 1080 personnes à un test psychologique noté de 0 à 5. Les résultats sont consignés dans le tableau suivant, où les individus ont été classés en trois catégories suivant le secteur d'activité de leur emploi actuel :

Secteur \ Note	0	1	2	3	4	5
Industrie A	60	60	60	60	60	60
Agriculture B	40	40	80	80	0	0
Services C	80	60	60	80	80	120

On choisit au hasard un individu de la population testée.

a) Quelle est la probabilité de choisir un individu de type A et ayant la note 2 ?
b) De choisir un individu ayant la note 5 ?
c) De choisir un individu de type A ?
d) Sachant que la note est 5, quelle est la probabilité que ce soit un individu de type A ?
e) Sachant que sa note est strictement inférieure à 2, quelle est la probabilité que ce soit un individu de type C ?

Exercice 7* On tire une carte au hasard parmi un jeu de 52 cartes.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir un trèfle ?
b) D'obtenir un roi ?
c) D'obtenir un roi de trèlfe ?
d) « Roi » et « Trèfle » sont ils indépendants ?

Exercice 8* Dans une entreprise, une machine A fabrique 40% des pièces et une machine B fabrique 60% des pièces. La proportion de pièces défectueuses par A est de 3% et par B de 2%. On choisit une pièce au hasard. Sachant qu'elle est défectueuse, calculer la probabilité qu'elle soit fabriquée par A.

Exercice 9* *Examen ECO II Janvier 1999 dénombrement*

a) Combien de mots distincts peut-on former avec les lettres du mot : maison ? (on négligera le fait que les mots n'ont pas de sens)
b) Combien de mots distincts peut-on former avec les lettres du mot : adaptable ?
c) Combien de mots distincts peut-on former avec les lettres du mot : rappeler ?
d) Combien y a-t-il de façons d'asseoir 10 personnes sur un banc de 4 places ?
e) Il faut asseoir 5 hommes et 4 femmes en ligne de manière à ce que les femmes occupent les places paires. Combien y a-t-il de façons de le faire ?
f) On doit ranger sur une étagère 4 ouvrages différents de mathématiques, 6 ouvrages différents de statistique et 2 livres d'économie différents. Combien y a-t-il de rangements différents si les ouvrages doivent être rangés par spécialité ?
g) Même question si seuls les ouvrages de mathématiques doivent être rangés ensemble.

Exercice 10 Une classe comporte 9 garçons et 3 filles.

a) De combien de manières le professeur peut-il faire un choix de 4 élèves ?

b) Combien de ces choix comportent au moins une fille ?

c) Combien comportent exactement une fille ?

Exercice 11

Les questions de cet exercice sont indépendantes. Gardez les résultats sous forme algébrique et justifiez votre raisonnement.

Un lycée comporte 28 classes de seconde, 27 classes de premières et 25 classes de terminales. Les conseils de classe ont lieu à la fin du trimestre, et pour présider ceux-ci, il y a quatre personnes : le Proviseur, le Proviseur-Adjoint et deux Conseillers Principaux d'éducation (C.P.E.). On doit répartir équitablement les conseils de classe : vingt par personne.

1. Combien y a-t-il de façons de répartir les conseils de classe entre les quatre personnes ?
2. Combien y a-t-il de façons de les répartir si le Proviseur ne veut présider que des conseils de terminales ?
3. Combien y-a-t-il de façons de les répartir si le Proviseur ne veut pas de classes de secondes ?
4. Combien y a-t-il de façons de les répartir si le Proviseur veut dix classes de terminales, cinq de premières et cinq de secondes ?
5. Combien y-a-t-il de façons de les répartir si les conseils de classes de secondes doivent être présidés par un C.P.E. ?

Exercice 12* Une association comporte 20 membres, 12 hommes et 8 femmes. Ils décident de former un comité de 5 membres, où siégeront au moins 2 hommes et au moins 2 femmes.

a) Combien de comités différents peut-on former si chaque membre accepte de faire partie de ce comité ?

b) Si deux hommes refusent ?

c) Si M. X et Mme Y refusent de siéger ensemble ?

Exercice 13* Une secrétaire apporte au directeur une chemise contenant 4 feuillets, numérotés 1 à 4. La chemise s'ouvre, et les 4 feuillets tombent par terre. La secrétaire les ramasse au hasard, sans les regarder, et les met en vrac dans la chemise.

a) Quelle est la probabilité que les 4 feuillets soient dans l'ordre ?

b) Quelle est la probabilité que seul le feuillet numéroté 1 soit bien placé ?

c) Quelle est la probabilité que seuls les feuillets 1 et 4 soient bien placés ?

d) Quelle est la probabilité que seuls les feuillets 1 et 2 soient bien placés ?

Exercice 14 Madame Billet a dans son porte-monnaie dix pièces en euro et huit pièces en franc. Elle pioche au hasard et retire de son porte-monnaie cinq pièces. *On négligera le fait que les différentes pièces soient identifiables au toucher.*

a) Quelle est la probabilité qu'elle n'ait que des pièces en euro ? en franc ?

b) Quelle est la probabilité qu'elle ait exactement une pièce en euro ? deux pièces en euro ?

c) Madame Billet range son jeton de caddie dans son porte-monnaie. Si elle tire au hasard cinq pièces, quelle est la probabilité que son jeton soit parmi les cinq pièces ? qu'il n'y soit pas ? qu'il y ait exactement deux pièces en euro, deux pièces en franc, et un jeton de caddie ?

Exercice 15 Un individu peu recommandable trafique un dé pour que les résultats soient faussés.

a) Tout d'abord, il fait en sorte que la face 6 ait 2 fois plus de chances de sorti que n'importe quelle autre face. Déterminez la probabilité d'obtenir la face 6, et la face 1.

b) Sur un autre dé, il fait en sorte que la face 1 ait deux fois plus de chances de sortir que la face 6, qui a elle même deux fois plus de chances que n'importe quelle autre face. Quelle est la probabilité d'obtenir la face 2 ? la face 1 ?

c) S'il utilise les deux dés qu'il a trafiqué, quelle est la probabilité qu'il obtienne une paire (deux 1, deux 2, etc.) en les lançant tous les deux ?

Exercice 16 Lors d'une kermesse de quartier, une loterie est organisée ainsi : il y a 125 tickets à vendre, mais seulement 100 sont gagnants. Monsieur A est le premier client de cette loterie.

1. S'il achète deux tickets, quelle est la probabilité qu'ils soient tout les deux gagnants ?
2. S'il achète trois tickets, quelle est la probabilité qu'au moins deux des tickets soient gagnants ?
3. Combien de tickets doit-il acheter d'un seul coup pour avoir au moins 99% de chances d'avoir au moins deux tickets gagnants ?

Exercice 17* Douze employés d'une entreprise veulent fêter la fin d'un stage de formation, et se présentent à la porte de l'unique restaurant encore ouvert. Le serveur indique qu'il ne reste plus de disponible que 5 plats de rôti de bœuf, 4 plats de poulet et 3 plats de couscous. De combien de manières les 12 employés peuvent-ils se répartir les plats si :

a) Tous sont indifférents à ce qu'ils mangent ?

b) M. X veut du poulet ?

c) Mme Y ne veut pas de couscous ?

Exercice 18* On lance deux dés bien équilibrés à six faces numérotés de 1 à 6. On observe le résultat obtenu, en notant la plus petit face obtenue, puis la plus grande. Ainsi, si on obtient 5 et 4, on note 45, si c'est 3 et 2, on note 23. Bien évidemment, si on obtient une paire, 6 et 6 par exemple, on note 66.

a) Quelle est la probabilité que le résultat soit pair ?

b) Quelle est la probabilité que le résultat soit divisible par 3 ?

c) Quelle est la probabilité que le résultat soit pair et divisible par 3 ?

d) Quelle est la probabilité que le résultat soit pair ou divisible par 3 ?

e) Sachant que le résultat est pair, quelle est la probabilité que le résultat soit divisible par 3 ?

Exercice 19 Le début d'une réussite particulière consiste à tirer cinq cartes parmi un jeu de 32 cartes. Calculez le nombre de façons que parmi ces cinq cartes :

a) deux soient des cœurs :

b) aucun soit un cœur :

c) au moins un soit un cœur :

d) deux soient des cœurs, et deux autres des trèfles :

e) deux soient des cœurs, et au moins un soit un trèfle :

Exercice 20* Une loterie consiste à tirer au hasard sans remise 5 boules parmi 50 boules numérotées de 1 à 50 et, toujours sans remise, 2 boules « étoiles » parmi 9 boules « étoile », numérotées de 1 à 9. Un bulletin est gagnant s'il vérifie l'une des 12 possibilités suivantes :

	Bons numéros	Bonnes étoiles		Bons numéros	Bonnes étoiles		Bons numéros	Bonnes étoiles
1	5	2	5	4	1	9	3	0
2	5	1	6	4	0	10	2	2
3	5	0	7	3	2	11	2	1
4	4	2	8	3	1	12	1	2

a) Quelle est la probabilité d'avoir sur le bulletin 5 bons numéros et 2 bonnes étoiles ? Même question avec 1 bon numéro et 2 bonnes étoiles ?

b) Quelle est la probabilité d'avoir 4 bons numéros ?

c) Quelle est la probabilité de ne pas gagner à cette loterie ?

Note : vous laisserez les résultats sous forme de fractions. Justifiez votre raisonnement.

Exercice 21 Une boite contient neuf tickets numérotés de 1 à 9.

a) Si l'on tire trois tickets un par un sans remise, quelle est la probabilité qu'ils soient tous pairs ? tous impairs ? que l'on obtienne successivement pair, impair et pair ? que l'on obtienne impair, pair et impair ?

b) Si l'on tire trois tickets un par un avec remise, quelle est la probabilité qu'ils soient tous pairs ? tous impairs ? que l'on obtienne successivement pair, impair et pair ? que l'on obtienne impair, pair et impair ?

Note : vous laisserez les résultats sous forme de fractions. Justifiez votre raisonnement.

Exercice 22* Le menu d'un restaurant propose entre autres des pizzas. Pour réaliser ses pizzas, le cuisinier dispose de 20 ingrédients différents (5 sortes de fromage, 4 sortes de viande, 4 sortes de poissons, dont des anchois, 6 sortes de légumes et des olives).

a) Combien de pizzas différentes peut-il élaborer s'il ne prend que 4 ingrédients parmi les 20 ? S'il en prend 6 parmi les 20 ?

b) Combien de pizzas différentes peut-il composer avec 6 ingrédients, mais sans anchois ?

c) Combien de pizzas végétariennes (sans viande) peut-il composer ? (6 ingrédients)

d) Même question s'il prend obligatoirement du (ou des) poisson(s) pour réaliser des « pizzas de la mer » ?

Exercice 23 Dans un pays, il y a deux régions, le Nord, où résident 40% des habitants, et le Sud, où habite le reste. 30% des habitants du Nord partent en vacances à l'étranger, mais seulement 15% des habitants du Sud. Vous rencontrez à l'étranger un habitant de ce pays. Quelle est la probabilité qu'il vienne du Sud ?

Exercice 24 Deux joueurs A et B utilisent 32 cartes à jouer. A distribue à chacun 8 cartes au hasard. Quelle est la probabilité que :

a) A possède trois trèfles ?
Trois piques et un trèfle ?

b) A et B chacun possèdent trois piques ?

c) Sachant que B possède trois piques, que A en ait plus que B ?

d) Sachant que B possède au moins trois piques, que A en ait plus que B ?

Note : vous laisserez les résultats sous forme algébrique. Justifiez votre raisonnement.

Exercice 25 Quatre personnes, nommées A, B, C et D, jouent aux cartes, avec un jeu de 52 cartes. La première étape consiste à distribuer à chacun 13 cartes, ces 13 cartes constituant ce que l'on appelle une main.

1. Combien de mains différentes de 13 cartes le joueur A peut-il recevoir ? Combien y-a-t-il de façons différentes de distribuer les 52 cartes aux quatre joueurs ?
2. Pour ce jeu, les cœurs ont une importance spécifique. Quelle est la probabilité pour le joueur A d'en avoir 5 ? De ne pas en avoir ?
3. Le 2 de trèfle et la dame de pique sont également deux cartes qui ont une importance spécifique dans le jeu. Quelle est la probabilité pour le joueur A d'avoir le 2 de trèfle ? La dame de pique ? Le 2 de trèfle et la dame de pique ?
   Les événements «avoir le 2 de trèfle» et «avoir la dame de pique» sont-ils indépendants ? (*justifiez votre réponse*)

4. Quelle est la probabilité pour le joueur A d'avoir 6 piques ?
   D'avoir 8 cœurs ?
   Quelle est la probabilité pour le joueur A d'avoir 6 piques ou 8 cœurs ?

Exercice 26 Un enseignant donne une épreuve de statistiques qui consiste à répondre à un Questionnaire à Choix Multiples (Q.C.M.) formé de 20 questions, chaque question ayant 3 réponses possibles.

1. Combien y a-t-il de façons de répondre aux 20 questions ? À une seule des questions ? À deux des questions ? En déduire le nombre de façons de répondre à n questions ($1 \leq n \leq 20$) ?
2. Bien évidemment, pour chaque question, une seule réponse est correcte parmi les 3 possibles. Si un étudiant répond totalement au hasard, quelle est la probabilité qu'il ait 5 réponses correctes parmi les 20 questions ? Aucune ?
3. L'étudiant est éliminé s'il a moins de 6 réponses correctes sur les 20 questions. Quelle est la probabilité qu'il soit éliminé ? En moyenne, combien de réponses correctes aura-t-il ?

TD n° 2 : Variables aléatoires

Exercice 1 Soit un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6. Soit X_i la variable aléatoire définie telle que :
- $X_i = 0$ si le dé donne 1 ou 2 au i$^{\text{e}}$ lancer ;
- $X_i = 1$ si le dé donne 3, 4, 5 ou 6 au i$^{\text{e}}$ lancer.

a) Quelle est la loi de X_1 ? Représentez-la graphiquement et déterminez sa fonction de répartition.

b) Soit Y la variable aléatoire définie telle que $Y = X_1 + X_2$. Quelle est la loi de Y ?

c) Soit Z la variable aléatoire définie telle que $Z = X_1 - X_2$. Quelle est la loi de Z ?

d) Y et Z sont-elles indépendantes ?

Exercice 2* Une urne contient 2 boules rouges et 3 boules blanches. Quelle est la loi du nombre de tirages **sans remise** nécessaires pour obtenir une boule blanche ? Calculer son espérance mathématique. Mêmes questions si le tirage s'effectue **avec remise**.

Exercice 3* Soit un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6. Le dé est « pipé » de manière à ce que chaque face ait une probabilité de sortir proportionnelle à sa valeur : 6 a 6 fois plus de chances de sortir que 1, 5 a 5 fois plus de chances de sortir que 1, ..., 2 a 2 fois plus de chances de sortir que 1.

a) Déterminez la loi de la variable aléatoire X = « face du dé obtenue ».

b) Déterminez sa fonction de répartition et son espérance.

Exercice 4* Soit f une fonction numérique définie telle que $f(x) = a$ sur $[0, 2\theta]$, $\theta > 0$.

a) Déterminez a en fonction de θ de manière à ce que f soit la fonction de densité d'une variable aléatoire que l'on notera X.

b) Déterminez sa fonction de répartition.

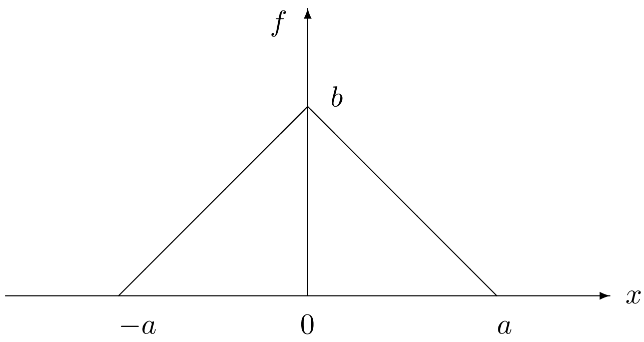
Exercice 5* Un événement A a une probabilité p d'arriver (et donc $1 - p$ de ne pas se réaliser). $0 < p < 1$.

a) Quelle est la loi de la variable aléatoire X_1 = « nombre d'épreuvres nécessaires pour obtenir une fois l'événement A » ?

b) Quelle est la loi de la variable aléatoire X_2 = « nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir deux fois l'événement A » ?

c) En déduire la loi du nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir k fois l'événement A.

Exercice 6* Soit f une fonction numérique dont la représentation graphique est :



a) Déterminez a en fonction de b de manière à ce que f soit la fonction de densité d'une variable aléatoire que l'on notera X.
b) Déterminez la fonction de densité f.
c) Déterminez son espérance mathématique et sa variance.
d) Déterminez sa fonction de répartition.

Exercice 7* (Loi de Pareto) Soit une fonction f définie telle que $f(x) = \frac{\alpha-1}{\theta}\left(\frac{\theta}{x}\right)^{\alpha}$ sur $]\theta, +\infty[$ avec $\alpha > 1$ et $\theta > 0$.

a) Vérifier que f est bien une fonction de densité d'une variable aléatoire que l'on notera X.
b) Déterminer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}(X)$ et $F_X(x)$.

Exercice 8* Soit f une fonction numérique définie telle que $f(x) = a \cdot \exp(-kx)$ sur $[A, +\infty[$, avec $a, k > 0$.

a) Déterminez a en fonction de A et de k de manière à ce que f soit la fonction de densité d'une variable aléatoire que l'on notera X.
b) Déterminez $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Exercice 9* Soit X une variable aléatoire de fréquence $f(x) = \frac{x}{a}$ pour $x = 1, 2, ..., n$.

a) Déterminez a.
b) Déterminez $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}(X)$ et $F_X(x)$.

Exercice 10 Soit f une fonction numérique telle que $f(x) = x + a$ sur $[0, 1]$.

a) À quelle condition sur le paramètre a f est-elle la fonction de densité d'une variable aléatoire que l'on notera X ?
Note ! une représentation graphique peut aider à déterminer le résultat.
b) Déterminez l'espérance mathématique $\mathbb{E}(X)$ et la variance $\mathbb{V}(X)$ de la variable aléatoire X ?
c) Déterminez sa fonction de répartition F.
d) Calculez $\mathbb{P}(0,25 < X < 0,75)$.

Exercice 11* Soit une fonction numérique f définie sur $[0, 2]$ telle que :

$$f_X(x) = \begin{cases} a & \text{si } x \in [0, 1[\\ 3a & \text{si } x \in [1, 2] \end{cases}$$

où a est un paramètre strictement positif.

a) Déterminez le paramètre a de manière à ce que f soit la densité d'une variable aléatoire que l'on notera X.
b) Déterminez l'espérance mathématique $\mathbb{E}(X)$, la variance $\mathbb{V}(X)$.
c) Déterminez et représentez graphiquement la fonction de répartition F_X de X.

Exercice 12 Soit f une fonction numérique sur l'intervalle $[0,1]$ telle que $f(x) = 2ax + b$, où a et b sont des paramètres réels strictement positifs.

a) Déterminez les conditions sur les paramètres a et b pour que f soit la fonction de densité d'une variable aléatoire que l'on notera X.

b) Calculez l'espérance $\mathbb{E}(X)$ et la variance $\mathbb{V}(X)$ de la variable aléatoire X.

c) Déterminez la fonction de répartition F de la variable aléatoire X.

Exercice 13 Soit f une fonction numérique sur $[0, \theta]$, $\theta > 0$, telle que $f(x) = a(x - \theta)$.

a) À quelle condition sur le paramètre a, f est la fonction de densité d'une variable aléatoire que l'on notera X ?

b) Déterminez l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.

c) Déterminez sa fonction de répartition :

d) Calculez $\mathbb{P}\left\{\frac{\theta}{3} < X < \frac{2}{3}\theta\right\}$

Exercice 14 Soit f une fonction numérique telle que $f(x) = a$ sur l'intervalle $[-1, 1]$.

1. À quelle condition sur le paramètre a la fonction f est-elle la fonction de densité d'une variable aléatoire que l'on notera X ?
2. Déterminez l'espérance $\mathbb{E}(X)$ et la variance $\mathbb{V}(X)$ de la variable aléatoire X ;
3. Déterminez la fonction de répartition F de la variable aléatoire X ;
4. Déterminez la probabilité $\mathbb{P}\left\{-\frac{1}{2} < X < \frac{1}{2}\right\}$

TD n^o 3 : Lois théoriques usuelles – approximations de lois

Exercice 1* M. Z adore le jeu de solitaire sur son ordinateur. Il en a effectué des dizaines de milliers de parties, et les statistiques qui apparaissent quand il gagne une partie ne lui donnent qu'un score assez décevant de 6% de parties réussies au total.

a) Monsieur Z dispose d'un peu de temps devant lui, et décide de faire quelques parties. Soit la variable aléatoire $X =$ « nombre de parties nécessaires avant d'en réussir une ». Quelle est la loi suivie par X ? Quelle est la probabilité qu'il réussisse à la septième partie ? Monsieur Z a râté les quatre premières parties. Quelle est la probabilité qu'il réussisse la cinquième ? Monsieur Z décide de s'arrêter dès qu'il aura gagné une partie. En moyenne, après combien de parties s'arrêtera-t-il ?

b) Monsieur Z pense disposer d'assez de temps pour effectuer douze parties de solitaire. Soit la variable aléatoire $Y =$« nombre de parties gagnées parmi douze ». Quelle est la loi suivie par Y ? Quelle est la probabilité que M. Z gagne deux parties ? Moins de deux ? En moyenne, combien gagnera-t-til de parties ?

Exercice 2* Un joueur de pétanque rate ses carreaux une fois sur trois. Il doit tirer trois boules.

a) Quelle est la probabilité qu'il n'en enlève aucune ?

b) Quelle est la probabilité qu'il enlève deux boules ?

Exercice 3* Une entreprise de ventes par correspondance possède une centrale télephonique pour accueillir les commandes. En moyenne, cette centrale reçoit un appel toute les trois minutes, et la communication dure en moyenne trois minutes également.

a) S'il n'y a qu'une personne pour répondre, quelle est la probabilité pour que la clientèle soit satisfaite, c'est-à-dire qu'on décroche quand le(s) client(s) appelle(nt) ?

b) Même question s'il y a deux personnes pour répondre ? trois ? Combien faut-il de personnes pour répondre pour qu'au moins 98% des clients soient satisfaits ?

Exercice 4* Le poids de 80 sacs d'aliments pour animaux est distribué normalement avec une moyenne de 68kg et un écart-type de 0.6kg. Combien de ces sacs ont un poids compris entre 66.8 et 68.3kg ? inférieur à 66.4kg ?

Exercice 5* Soit X une variable normale de loi $N(\mu, \sigma)$, avec $\sigma > 0$, telle que $\mathbb{P}\{X < 7\} = 27.43\%$ et $\mathbb{P}\{X > 14\} = 21.19\%$.

1. Déterminez μ et σ.
2. Calculez $\mathbb{P}\{6 < X < 8\}$.
3. On pose $Y = 2X$. Quelle est la loi de Y ? Déterminez $\mathbb{P}\{Y > 19\}$.
4. On pose $Z = X + 10$. Quelle est la loi de Z ? Déterminez $\mathbb{P}\{Z > 19\}$.

Exercice 6* Soient X une variable du χ^2 à 12 degrés de liberté, Y une variable de Student à 16 degrés de liberté et Z une variable de Fisher à $(12, 16)$ degrés de liberté.

a) Déterminer x tel que $\mathbb{P}\{X < x\} = 0.90$. Encadrer au mieux $\mathbb{P}\{X < 4.5\}$.

b) Déterminer y et y' tels que $\mathbb{P}\{Y < y\} = 0.8$ et $\mathbb{P}\{Y < y'\} = 0.2$.

c) Déterminer z tel que $\mathbb{P}\{Z < z\} = 0.95$.

Exercice 7* Soient X une variable normale d'espérance 2 et d'écart-type 3, et Y une variable normale centrée réduite au carré, X et Y étant indépendantes.

a) Quelle est la loi de $Z = \left(\frac{X-2}{3}\right)^2 + Y$? Pour quelle valeur z a-t-on $\mathbb{P}\{Z > z\} = 0.05$?

b) Soit T de même loi que Z, indépendante de X. Quelle est la loi de $U = \frac{\frac{X-2}{3}}{\sqrt{\frac{T}{2}}}$? Pour quelle valeur u a-t-on $\mathbb{P}\{U > u\} = 0.5$?

c) Quelle est la loi de $V = U^2$? Pour quelle valeur v a-t-on $\mathbb{P}\{V < v\} = 0.05$?

Exercice 8* Une machine produit 10% d'outils défectueux. Calculer la probabilité que parmi un lot de 10 outils, deux exactement soient défectueux en utilisant :

a) la loi binomiale.

b) l'approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson.

Exercice 9* Une personne lance 120 fois une pièce de monnaie. Quelle est la probabilité qu'elle obtienne entre 40% et 60% de faces ?

Exercice 10* Un processus de fabrication suit une loi de Poisson de paramètre 100. Quelle est la probabilité que l'on fabrique plus de 120 produits ?

Exercice 11* 250 étudiats qui s'inscrivent à un certain diplôme savent que la promotion précédente a eu 60% de réussite à l'examen.

a) Soit X_i la variable aléatoire égale à 1 si l'étudiant i réussit, et égale à 0 si l'étudiant i échoue, $i = 1, 2, \dots, 250$. Quelle est la loi de probabilité de X_i ?

b) Soit $Y = \sum_{i=1}^{250} X_i$, le nombre d'étudiants qui réussissent l'examen. Quelle est la loi de probabilité suivie par Y ?

c) Par quelle loi peut-on approcher la loi de Y ?

d) L'appariteur, qui gère les salles de cours, prévoit une salle pour 160 personnes pour l'année suivante. Quelle est la probabilité que tous les étudiants qui réussissent l'examen arrivent à trouver une place dans cette salle ? (On suppose qu'il n'y a pas de redoublants.)

e) L'appariteur sait que quelques étudiants n'assisteront pas au cours. Combien de places doit-il prévoir pour qu'au moins 95% des étudiants trouvent une place ?

Exercice 12 Sous l'hypothèse que 2% des êtres humains sont gauchers, calculer la probabilité que parmi 100 personnes, 3 au plus soient gauchères.

Exercice 13* *Issu de G. Frugier – Les probabilités sans les boules.*

Partie A Une chenille processionnaire descend le long d'un grillage. À chaque épissure, elle prend la maille de droite une fois sur trois, celle de gauche deux fois sur trois. Elle descend ainsi quatre niveaux.

a) Quelle est la probabilité que la chenille air pris trois fois la maille de droite sur les quatre niveaux ?

b) Quelle est la probabilité que la chenille ait pris trois fois la maille de gauche sur les quatre niveaux ?

Partie B

a) On lance trois fois un dé à jouer non pipé.

   1) Quelle est la probabilité d'obtenir trois 5 ?
   2) Quelle est la probabilité d'obtenir une somme de 15 ?
   3) Quelle est la probabilité d'obtenir le premier 5 au troisième lancer ?

b) On lance trois fois trois dés à jouer non pipés ; quelle est la probabilité d'obtenir trois fois une somme de 15 ?

Partie C Une entreprise dispose d'un parc de 60 ordinateurs neufs ; la probabilité que l'un d'entre eux tombe en panne sur une période d'une année est de 0.1 (période de garantie) ; la panne de l'un des ordinateurs n'affecte pas les autres machines du parc.
Quelle est la probabilité que moins de 4 appareils tombent en panne durant l'année ?

Partie D Une branche présente 10 fleurs blanches ou roses réparties au hasard. On compte 2 fleurs blanches et 8 fleurs roses. On cueille successivement et au hasard 3 fleurs ; quelle est la probabilité d'avoir 2 fleurs blanches ?

Exercice 14 Un distributeur automatique de boissons a de petits problèmes de fonctionnement : une fois sur trois, il délivre la boisson commandée, sinon c'est une mixture imbuvable.
Si 90 personnes essaient cependant d'obtenir une boisson à cette machine, quelle est la probabilité qu'entre 30% et 40% d'entre-elles obtiennent la boisson qu'elles avaient commandée ?

TD n° 4 : Distributions d'échantillonnages

Exercice 1* Soit la population $\{1, 3, 5\}$.

a) Calculer la moyenne μ de la population et l'écart-type σ.

b) Écrire tous les échantillons de taille 2 qui peuvent être extraits avec remise de la population.

c) Calculer les $\overline{X}_i$, V_i^2, S_i^2 et vérifier que $\mathbb{E}(\overline{X}) = \mu$, $\mathbb{V}(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$, $\mathbb{E}(V^2) \neq \sigma^2$ et $\mathbb{E}(S^2) = \sigma^2$.

d) Tirage sans remise : écrire tous les échantillons de taille 2.

e) Vérifier que $\mathbb{E}(\overline{X}) = \mu$ et $\mathbb{V}(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}\frac{N-n}{N-1}$, où N est la taille de la population.

Exercice 2* Soit la population $\{B, B, N\}$, c'est-à-dire deux boules blanches et une boule noire.

a) Écrire tous les échantillons de taille 2 avec remise et calculer f_i = « proportion de boules blanches dans chacun des échantillons ». Vérifier que $\mathbb{E}(f) = p$ = « proportion de boules blanches dans la population » et que $\mathbb{V}(f) = \frac{p(1-p)}{n}$.

b) Échantillon sans remise : vérifier que $\mathbb{E}(f) = p$ et que $\mathbb{V}(f) = \frac{p(1-p)}{n}\frac{N-n}{N-1}$.

Exercice 3* Supposons que les poids de 3000 étudiants d'une université sont distribués normalment avec une moyenne de 68kg et un écart-type de 3kg. Si on tire 80 échantillons de 25 étudiants chacun, quelles seront l'espérance et la variance de la moyenne d'échantillonnage résultante si l'échantillonnage est :

a) non exhaustif (avec remise) ;

b) exhaustif (sans remise) ;

c) Dans combien d'échantillons peut-on s'attendre à trouver une moyenne (d'échantillonnage) comprise entre $66,8$ et $68,3$kg ?

d) inférieure à 66.4kg ?

Exercice 4* Chaque personne d'un groupe de 500 jette une pièce 120 fois. Combien de sujets peuvent s'attendre à ce que :

a) entre 40% et 60% de leurs jets aient donné des faces ;

b) 5/8 ou plus de leurs jets aient donné des faces.

Exercice 5* Un candidat aux élections a recueilli 46% des votes. Quelle est la probabilité pour que :

a) 200 personnes choisies au hasard lui aient donné une majorité ?

b) 1000 personnes choisies au hasard lui aient donné une majorité ?

Exercice 6* Soit un échantillon de n observations indépendantes issues au hasard de la loi d'une variable aléatoire de Poisson. Par quelle loi peut-on approcher la loi de $\overline{X}$ si n est grand ($n > 30$) ? Même question si la variable aléatoire suit une loi exponentielle de paramètre μ.

Exercice 7* En général, le courrier reçu par une entreprise est composé à 75% de lettres de clients, le reste étant des envois de fournisseurs ou de l'administration. La secrétaire qui s'occupe du courrier chaque matin prend une poignée de 32 lettres au hasard. Quelle est la probabilité que 24 lettres concernent la clientèle ?

Exercice 8* M. Z est enquêteur pour un institut de sondage et connaît bien les villes où il exerce son métier. Par exemple, il sait que 42% des habitants de la ville A ont voté pour M. X lors de la dernière élection, et que dans la ville B, 44% ont voté pour M.X. On lui demande d'interroger 100 personnes dans chaque ville sur la popularité de M. X et son éventuelle réélection. Quelle est la probabilité que les deux pourcentages qu'il obtiendra s'écartent de plus de 5% ?

Exercice 9 Soit X une variable aléatoire de densité $f_X(x) = \frac{1}{\theta}$ sur $[0, \theta]$. Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un échantillon de n observations indépendantes issues au hasard de la loi de X. Déterminez la loi de $\inf\{X_i\}$ et $\sup\{X_i\}$. Même question si la densité de X est $f_X(x) = \mu \exp(-\mu x)$ sur $[0, +\infty)$.

TD n^o 5 : Intervalles de confiance

Exercice 1 Un étudiant prépare ses T.D. de statistiques. L'énoncé d'un exercice lui indique que l'on a obtenu une moyenne de 10 sur un échantillon de taille 25 issu au hasard d'une population normale, avec « un écart-type égal à 2 ». Malheureusement, l'exercice est mal rédigé, et on ne sait pas exactement quel est cet écart-type. Aidez notre étudiant en construisant l'intervalle de confiance dans chacun des cas suivants :

a) l'écart-type « égal à 2 » est σ, l'écart-type de la population ;

b) l'écart-type « égal à 2 » est S, l'écart –type sans biais ;

c) l'écart-type « égal à 2 » est V, l'écart – type empirique.

Exercice 2* A partir d'une population normale, un statisticien a obtenu un intervalle de confiance de la moyenne, à 5%, avec un écart-type $\sigma = 1$, égal à $[9.608; 10.392]$. Mais il a égaré les données. Aidez-le en retrouvant n, la taille de l'échantillon et $\bar{X}$, la moyenne de l'échantillon.

Exercice 3 Une usine emploie plusieurs milliers d'ouvriers. Un chercheur sait que les salaires hebdomadaires sont normalement distribués avec un écart-type de 100 euros. Il veut estimer le salaire hebdomadaire moyen à 20 euros près, avec $\alpha = 1\%$. Quelle taille minimale doit avoir l'échantillon ?

Exercice 4* Un chimiste teste deux méthodes de fabrication d'un produit. Un échantillon de 25 essais montre qu'avec la première méthode il obtient en moyenne 12 mg, avec un écart-type $\sigma_1 = 0,1$ mg. Avec la deuxième méthode, il calcule une moyenne de $11,5$ mg à partir de 36 observations, avec un écart-type $\sigma_2 = 0,095$ mg. Les résultats moyens sont-ils significativement différents ?

Exercice 5* Monsieur Z, éternel candidat à la mairie, fait effectuer un sondage auprès de 100 électeurs (ses moyens financiers de campagne sont faibles), et on lui rapporte que seulement 45 personnes lui sont favorables. Estimer, à l'aide d'un intervalle de confiance, la proportion d'électeurs favorables à M. Z. Quelle aurait du être la taille de l'échantillon pour obtenir une estimation à $0,5\%$ près ?

Exercice 6 Un étudiant prépare comme à son habitude ses T.D. de statistiques. Il lui faut déterminer un intervalle de confiance d'une proportion. Par la méthode par défaut, il trouve l'intervalle : $[9,6968\%, 30,3032\%]$. Il ne se rappelle plus exactement de l'exercice auquel correspond ce calcul d'intervalle.

a) Aidez-le en retrouvant f, la proportion d'échantillonnage, et α, le risque que la proportion n'appartienne pas à l'intervalle, sachant qu'il se souvient que la taille de l'échantillon est $n = 100$;
b) Déterminez les intervalles de confiances de la proportion avec $\alpha = 5\%$ par les 3 méthodes que vous connaissez.

Exercice 7* Un fabricant de téléphones portables envisage de lancer un nouveau modèle. Ses services techniques lui proposent deux types d'appareils, que son service d'études propose à deux échantillons de consommateurs éventuels. Pour le premier type d'appareil, 73 individus sur 146 sont satisfaits ; par contre, sur 140 individus, 77 sont mécontents du deuxième modèle. Peut-on affirmer que les deux modèles de téléphone satisfont la clientèle dans la même proportion ?

Exercice 8 Pour 2684 contrôles effectués dans le Morbihan, on a observé 732 alcootests positifs, et pour 3268 contrôles dans le Finistère, 824 positifs. Peut-on dire que les finistériens et les morbihannais ont le même comportement vis-à-vis de l'alcool au volant ?

Exercice 9* Un statisticien étudie un échantillon de 100 observations. Pour simplifier ses calculs, il a pris $\sigma = 1.5$. À l'aide d'un intervalle de confiance, pouvez-vous dire si son approximation est réaliste sachant que l'on a obtenu $n \cdot V^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{X}\right)^2 = 181.25$?

Exercice 10 On se propose d'estimer la précision d'un thermomètre « ultrasensible ». Pour cela, on réalise 15 mesures x_i de la température d'un liquide maintenu pendant le temps des mesures à une température constante de 20^oC. On admet que les X_i suivent indépendamment une loi normale. Construire un intervalle de confiance pour la variance sachant que $\frac{1}{15} \sum_{i=1}^{15} (x_i - 20)^2 = 18$.

Exercice 11* À partir d'un échantillon de n observations indépendantes, issues au hasard de la loi d'une variable aléatoire de Poisson, n étant supposé grand ($n > 30$), construire un intervalle de confiance du paramètre λ.

Exercice 12 Un statisticien a obtenu un échantillon de 18 observations de salaires mensuels en 1999 sur une population donnée, et il calcule une moyenne de 1300 euros avec un écart-type de 100 euros. On suppose que les salaires sont distribués normalement.

a) Déterminer un intervalle de confiance du salaire moyen.

b) Un de ses collègues lui fournit d'autres données supplémentaires, indépendantes des premières, 31 observations de salaire, à partir de la même population et pour la même année 1999, sur lesquelles il calcule par coïncidence la même moyenne 1300 euros et le même écart-type 100 euros. Déterminer un intervalle de confiance de la moyenne des salaires en 1999.

c) En 1998, on avait observé 1292 euros de salaire en moyenne, avec un écart-type de 103 euros, sur un échantillons de 50 observations indépendantes. Déterminer un intervalle de confiance de la différence des salaires moyens des deux années et concluez (on supposera que les variances des populations sont égales).

Exercice 13 Un certain produit laitier, emballé en plaquette de 100 grammes, est censé, selon une norme européenne, contenir au moins 85 grammes de matière grasse. Un laboratoire indépendant étudie un échantillon de 100 plaquettes, et constate qu'en moyenne ils contiennent $83,03$ grammes de matière grasse. A l'aide d'un intervalle de confiance, en prenant un risque de 5% de se tromper, pouvez-vous affirmer que le produit laitier respecte la norme ?
Note : on supposera que la quantité de matière grasse par plaquette est distribuée normalement, avec un écart-type de 10 grammes.

Exercice 14 Monsieur X est très friand de pâtes fraiches, et les achète toujours dans le même magasin. Il prend toujours la même marque de pâtes, emballées en sachet de 450 grammes. Or, Monsieur X a l'impression que ces sachets ne contiennent pas la quantité indiquée. Il constate, après avoir acheté 100 paquets, que 97 d'entre eux contiennent bien moins de 450 grammes de pâtes. Au risque de se tromper de 5%, déterminez un intervalle de confiance de la proportion de paquets dans le magasin ne contenant pas 450 grammes (vous utiliserez les trois méthodes que vous connaissez).

Exercice 15 Avant de lancer un nouveau produit, on effectue un sondage auprès de 100 ménages, et on s'aperçoit que 90 d'entre eux sont tout à fait satisfaits.
À l'aide d'un intervalle de confiance, au risque de se tromper de 5%, pouvez-vous dire si la proportion de ménages satisfaits *a priori* dans la population est significativement supérieure à 80%, seuil en dessous duquel le produit n'est pas lancé sur le marché ?
Vous utiliserez les trois méthodes que vous connaissez.
Indication supplémentaire : $\sqrt{0.0009} = 0.03$.

Exercice 16 Le chef d'un service administratif d'une grande entreprise se demande si les employés sont vraiment assidus à leur bureau, où s'ils passent trop de temps dans les couloirs ou devant la machine à café à discuter de leur week-end ou autres loisirs. Il demande donc à sa secrétaire de leur téléphoner à un horaire où ils sont censés être assis à leur bureau sur le poste local sous un prétexte quelconque. La secrétaire effectue 100 tentatives d'appels, et obtient 48 réponses d'employés présents à ce moment.
À l'aide d'un intervalle de confiance, au moyen des trois méthodes que vous connaissez, calculez la proportion d'employés présents à leur bureau au moment de l'appel. Peut-on affirmer alors que la proportion d'employés assidus est significativement inférieure à 60% ?
Note : vous utiliserez un risque α de 5%.

Exercice 17 Un candidat à la députation fait effectuer un sondage d'opinions dans les deux principales villes de ce qu'il espère être sa future circonscription d'élu.
Dans la première ville A, un sondage effectué auprès de 990 électeurs lui donne 48.5% d'opinions favorables, et le sondage effectué dans la ville B auprès de 1010 personnes lui donne un pourcentage de 49.3% d'opinions favorables.
Note : pour la construction des intervalles de confiance, vous n'utiliserez qu'une seule des méthodes que vous connaissez.

a) À l'aide d'un intervalle de confiance, estimer la proportion d'électeurs favorables au candidat dans la ville A ; le candidat peut-il être certain d'être élu ?

b) Un intervalle de confiance permet-il de dire si les proportions d'électeurs favorables sont significativement différentes dans les deux villes ?

Exercice 18 Un produit industriel contient du sulfate d'ammonium. Il ne doit pas y avoir plus de 11 milligrammes de sulfate par litre, sinon le produit industriel sera considéré comme dangereux et impropre à l'utilisation. Le fabricant fait tester 36 bouteilles de produit, et trouve en moyenne 9.98 milligrammes de sulfate par litre. On considère habituellement que l'écart-type du poids de sulfate par litre est égal à 3 milligrammes.

a) Construire l'intervalle de confiance du poids moyen de sulfate par litre avec :

   i) Un risque de se tromper de 5%,

   ii) Un risque de se tromper de 1% ;

   À la lecture de ses résultats, le produit peut-il être considéré comme dangereux et impropre à la consommation ?

b) Au risque de se tromper de 5%, quelle aurait dû être la taille de l'échantillon pour que l'intervalle de confiance soit précis à 0.5 milligrammes près ?